

Vorlesung 3

Der Erwartungswert

von diskreten reellwertigen Zufallsvariablen

Teil 4

Beispiele

1. Der Erwartungswert der Binomialverteilung

(als Erwartungswert der Anzahl der Erfolge
beim n -fachen p -Münzwurf)

(Buch S. 49)

X sei $\text{Bin}(n, p)$ -verteilt.

$$\mathbf{E}[X] = ?$$

X sei $\text{Bin}(n, p)$ -verteilt.

$$\mathbf{E}[X] = ?$$

$$\sum_{k=0}^n k \mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \dots$$

X sei $\text{Bin}(n, p)$ -verteilt.

$$\mathbf{E}[X] = ?$$

$$\sum_{k=0}^n k \mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \dots$$

Es GEHT so (vgl Buch Seite 23-24)

Aber es geht auch einfacher (vgl. Buch S. 49):

Sei $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ ein n -facher p -Münzwurf.

Dann ist $(Z_1 + \dots + Z_n)$ $\text{Bin}(n, p)$ -verteilt.

$$\mathbf{E}[Z_1 + \dots + Z_n] = \mathbf{E}[Z_1] + \dots + \mathbf{E}[Z_n]$$

$$\mathbf{E}[Z_i] = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$$

Fazit:

Der Erwartungswert einer $\text{Bin}(n, p)$ verteilten ZV ist

np .

2. Der Erwartungswert der hypergeometrischen Verteilung

(als Erwartungswert der Anzahl der “Erfolge”
beim n -fachen Ziehen ohne Zurücklegen)

(Buch S. 50 und S. 28)

$$P = \frac{r}{r+b} = \frac{r}{g} = \frac{8}{13}$$

BEISPIEL

Ziehen ohne Zurücklegen

$$g = 13$$

Eine Urne enthält r rote und b blaue Kugeln.

oooooooooooo

$r = 8$ $b = 5$

Aus der Urne werden ohne Zurücklegen n Kugeln gezogen.

oooooooooooo

$$n = 9$$

$R :=$ Anzahl der gezogenen roten Kugeln

$$E[R] = ?$$



$$R = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

$Z_i = 1$ falls i -te gezogene Kugel rot

$Z_i = 0$ falls i -te gezogene Kugel blau

ooooooooooooo $r = 8$ $b = 5$

$$R = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

$Z_i = 1$ falls i -te gezogene Kugel rot

$Z_i = 0$ falls i -te gezogene Kugel blau

ooooooooooooo $r = 8$ $b = 5$

$$\mathbf{P}(Z_i = 1) = \frac{r}{r + b}$$

$$R = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

$Z_i = 1$ falls i -te gezogene Kugel rot

$Z_i = 0$ falls i -te gezogene Kugel blau

ooooooooooooo $r = 8$ $b = 5$

$$\mathbf{P}(Z_i = 1) = \frac{r}{r + b}$$

Man stelle sich vor, die Nummern der Züge werden als rein zufällige Permutation an die $r + b$ Kugeln vergeben.

$\{Z_i = 1\}$ ist das Ereignis “die i -te gezogene Kugel ist rot”.

$$R = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

$Z_i = 1$ falls i-te gezogene Kugel rot

$Z_i = 0$ falls i-te gezogene Kugel blau

ooooooooooooo $r = 8$ $b = 5$

$$P(Z_i = 1) = \frac{r}{r + b} \quad \approx 0$$

$$E[Z_1 + \dots + Z_n] = E[Z_1] + \dots + E[Z_n] \\ = np$$

$$R = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

$Z_i = 1$ falls i -te gezogene Kugel rot

$Z_i = 0$ falls i -te gezogene Kugel blau

ooooooooooooo $r = 8$ $b = 5$

$$\mathbf{P}(Z_i = 1) = \frac{r}{r + b}$$

$$\mathbf{E}[Z_i] = \frac{r}{r + b}$$

$$R = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

$Z_i = 1$ falls i -te gezogene Kugel rot

$Z_i = 0$ falls i -te gezogene Kugel blau

ooooooooooooo $r = 8$ $b = 5$

$$\mathbf{P}(Z_i = 1) = \frac{r}{r + b}$$

$$\mathbf{E}[Z_i] = \frac{r}{r + b}$$

$$\mathbf{E}[R] = \mathbf{E}[Z_1] + \mathbf{E}[Z_2] + \dots + \mathbf{E}[Z_n]$$


$$R = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

$Z_i = 1$ falls i -te gezogene Kugel rot

$Z_i = 0$ falls i -te gezogene Kugel blau

ooooooooooooo $r = 8$ $b = 5$

$$\mathbf{P}(Z_i = 1) = \frac{r}{r + b}$$

$$\mathbf{E}[Z_i] = \frac{r}{r + b}$$

$$\mathbf{E}[R] = \mathbf{E}[Z_1] + \mathbf{E}[Z_2] + \dots + \mathbf{E}[Z_n]$$

$$\mathbf{E}[R] = n \frac{r}{r + b}$$

$\approx n p$

BEISPIEL

Ziehen ohne Zurücklegen

Eine Urne enthält r rote und b blaue Kugeln.

ooooooooooooo $r = 8$ $b = 5$

Aus der Urne werden ohne Zurücklegen n Kugeln gezogen.

ooooooo $n = 9$

$R :=$ Anzahl der gezogenen roten Kugeln

Verteilung von R ?

$$P(R=k) = ?$$

Verteilungsgewichte von R ?

$$\mathbf{P}(R = k) = ?$$

$$\mathbf{P}(R = k) = \binom{r}{k} \binom{b}{n-k} / \binom{r+b}{n}$$

$$(k = 0, \dots, n)$$

Eine ZV mit diesen Verteilungsgewichten
heißt

hypergeometrisch verteilt zu den Parametern $(\underline{n}, \underbrace{r+b}_g, r)$.

(vgl. Buch Seite 28)

$$p = \frac{r}{g}$$

$$\mathbf{P}(R = k) = \binom{r}{k} \binom{b}{n-k} / \binom{r+b}{n}$$

$$\mathbf{E}(R) = ?$$


$$\mathbf{P}(R = k) = \binom{r}{k} \binom{b}{n-k} / \binom{r+b}{n}$$

$$\mathbf{E}(R) = ?$$

$$\mathbf{E}[R] = \sum_{k=0}^n k \binom{r}{k} \binom{b}{n-k} / \binom{r+b}{n} = \dots$$

(Handwritten red annotations: a red oval around the fraction part of the sum, and a red arrow pointing from the text "= P(R=k)" to the fraction part.)

Es GEHT so (vgl. Buch Seite 32)

Aber wie wir eben gesehen haben,

(über die Darstellung von R als Summe von Zählern)

geht's auch einfacher (vgl. Buch S. 50/51).

3. Der Erwartungswert einer Anzahl von Runs

Runs beim fairen Münzwurf

$Z := (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ n-facher fairer Münzwurf

$$P\{Z_i = 1\} = \frac{1}{2} \quad P\{Z_i = 0\} = \frac{1}{2}$$

Run: ein Block von Nullen (Einsen),
der nicht echt in einem größeren Block enthalten ist

Runs beim fairen Münzwurf

$Z := (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ n-facher fairer Münzwurf

$$P\{Z_i = 1\} = \frac{1}{2} \quad P\{Z_i = 0\} = \frac{1}{2}$$

Run: ein Block von Nullen (Einsen),
der nicht echt in einem größeren Block enthalten ist

$R :=$ Anzahl Runs in Z

00000000 $R = 1$

11100011 $R = 3$

10101010 $R = 8$

$$\mathbf{E}[R] = ?$$

*Indikator-
variable*

Dazu schreiben wir R als Summe von Zählern.

Bei jedem Wurf zählen wir eins dazu,
wenn bei diesem Wurf ein Run beginnt:

$Y_i := 1$ falls bei i ein Run beginnt, $Y_i := 0$ sonst

$$R = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

$$Y_1 \equiv 1$$

$Y_i := 1$ falls bei i ein Run beginnt, $Y_i := 0$ sonst

$$R = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

$$Y_1 \equiv 1$$

$$\{Y_i = 1\} = \{(Z_{i-1}, Z_i) = (0, 1) \text{ oder } (1, 0)\} \quad (i > 1)$$

$$P(Y_i = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad (i > 1)$$

$Y_i := 1$ falls bei i ein Run beginnt, $Y_i := 0$ sonst

$$R = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

$$Y_1 \equiv 1$$

$$\{Y_i = 1\} = \{(Z_{i-1}, Z_i) = (0, 1) \text{ oder } (1, 0)\} \quad (i > 1)$$

$$P(Y_i = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad (i > 1)$$

$$\mathbf{E}[Y_i] = \frac{1}{2} \quad (i > 1)$$

$$\mathbf{E}[R] = \mathbf{E}[Y_1] + \mathbf{E}[Y_2] + \mathbf{E}[Y_3] + \dots + \mathbf{E}[Y_n]$$

$$\mathbf{E}[R] = 1 + \frac{1}{2}(n - 1)$$